

B.A./B.Sc. (PART II) EXAMINATION, 2021
(FACULTY OF SCIENCE)
[Also Common with subsidiary Paper of B.Sc. (Hons.) Part II]
(Three-Year Scheme of 10+2+3 Pattern)

MATHEMATICS
FIRST PAPER
(Real Analysis)

Time Allowed: 1 ½ Hours

Maximum Marks: 40 for Science and 53 for Arts

- (1) No supplementary answer-book will be given to any candidate. Hence the candidates should write the answer precisely in the Main answer-book only.

किसी भी परीक्षार्थी को पूरक उत्तर-पुस्तिका नहीं दी जायेगी। अतः परीक्षार्थियों को चाहिये कि वे मुख्य उत्तर-पुस्तिका में ही समस्त प्रश्नों का उत्तर लिखें।

- (2) All the parts of one question should be answered at the one place in the answer-book. One complete question should not be answered at different places in the answer book.

किसी भी एक प्रश्न के अन्तर्गत पूछे गये विभिन्न प्रश्नों के उत्तर-पुस्तिका में अलग-अलग स्थानों पर हल करने के बजाय एक ही स्थान पर हल करें।

This paper is divided into Three sections A, B & C. There is no boundation to attempt questions as per unit/Section/Part system. Section A will be make One complete question. (Attempt any Eight). From Section B, Q. No. 02, 03 will make One complete question, 04,05 will make One complete question, 06, 07 will make One complete question, 08,09 will make One complete question, 10, 11 will make One complete question.

This Question Paper has Eleven (11) Questions in all. Attempt any two questions. All questions carry equal marks.

SECTION - A / खण्ड - अ

1. (i) Write the order completeness Axioms.
क्रम पूर्णता अभिगृहीतियों को लिखिए।
- (ii) Write Archimedean property.
आर्किमिडीय गुणधर्म को लिखिए।
- (iii) Define limit point of a sequence.
अनुक्रम के सीमा बिन्दु को परिभाषित कीजिए।
- (iv) Write Cauchy's definition of continuity.
सांतत्य की कोशी की परिभाषा लिखिए।
- (v) State Lagrange's theorem of differentiability.
अवकलनीयता की लेग्रान्ज प्रमेय का कथन लिखिए।
- (vi) Write μ -test for the convergence of improper integrals of first kind.
प्रथम प्रकार के अनन्त समाकल की अभिसरण के लिए μ -परीक्षण लिखिए।
- (vii) Test for Riemann integrability of the
function $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \text{ is rational} \\ 1 & \text{if } x \text{ is irrational} \end{cases}, x \in [0, 1]$
फलन $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{यदि } x \text{ परिमेय है} \\ 1 & \text{यदि } x \text{ अपरिमेय है} \end{cases}, x \in [0, 1]$ की रीमान समकालनीयता का परीक्षण कीजिए।
- (viii) Write fundamental theorem of Integral calculus.
समाकलन की मूल प्रमेय को लिखिए।
- (ix) Define point wise convergence of sequence of functions.
फलनों के अनुक्रम के बिंदुशः अभिसरण को परिभाषित कीजिए।
- (x) Define Fourier series of periodic functions.
आवर्ती फलन की फोरिये श्रेणी परिभाषित कीजिए।

SECTION - B / खण्ड - ब

UNIT - I / इकाई - I

2. Prove that the ordered field is an infinite field.
सिद्ध करो कि क्रमित क्षेत्र एक अनन्त क्षेत्र होता है।
3. Show that the intersection of finite collection of open sets is an open set.

सिद्ध करो कि विवृत समुच्चयों का परिमित सर्वनिष्ठ निर्धारण एक विवृत समुच्चय होता है।

UNIT - II / इकाई - II

4. Use definition of limit of sequence to prove that $\left\{ \frac{3n}{n+5\sqrt{n}} \right\}$ converges to 3.
अनुक्रम की सीमा की परिभाषा का प्रयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\left\{ \frac{3n}{n+5\sqrt{n}} \right\}$, 3 को अभिसृत होती है।
5. If a function f is continuous on $[a, b]$, then show that it attains supremum and infimum at least once in $[a, b]$.
यदि फलन संवृत अन्तराल $[a, b]$ में सतत् हो तो सिद्ध करो कि फलन $[a, b]$ में कम से कम एक बार अपने उच्चक एवं निम्नक को प्राप्त करता है।

UNIT - III / इकाई - III

6. State and prove Rolle's theorem of differentiability.
अवकलनीयता की रोल प्रमेय का कथन दीजिए एवं सिद्ध कीजिए।
7. Test the convergence of the integral $\int_0^1 \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} dx$, where m and n are positive integers.
समाकल $\int_0^1 \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} dx$ के अभिसरण का परीक्षण कीजिए जहाँ m, n धन पूर्णांक हैं।

UNIT - IV / इकाई - IV

8. Show that every monotonic function f is Riemann integrable.
सिद्ध करो कि प्रत्येक एक दिष्ट फलन रीमान समाकलनीय होता है।
9. Find the upper and lower R-integrals of a function f in $[0, 2]$, where
अन्तराल $[0, 2]$ में फलन f के निम्न व उपरि रीमान समाकल ज्ञात कीजिए, जहाँ

$$f(x) = \begin{cases} x+x^2 & \text{when } x \text{ is rational} \\ \text{जब } x \text{ परिमेय है} \\ x^2+x^3 & \text{when } x \text{ is irrational} \\ \text{जब } x \text{ अपरिमेय है} \end{cases}$$

UNIT - V / इकाई - V

10. Prove that the sequence $\{f_n\}$ where $f_n(x) = x^n$ does not uniformly convergen in $[0, 1]$ although it converges pointwise.
सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\{f_n\}$ जहाँ $f_n(x) = x^n$ अन्तराल $[0, 1]$ में एक समान अभिसारी नहीं है यद्यपि यह बिन्दुशः अभिसारी है।
11. Find fourier series of following function :

निम्न फलन की फोरिये श्रेणी ज्ञात कीजिए

$$f(x) = x+x^2, -\pi \leq x \leq \pi$$

SECTION - C / खण्ड - स

12. Show that between two different real members there lie an infinite number of rational numbers.

सिद्ध करो कि किन्हीं दो भिन्न वास्तविक संख्याओं के मध्य अनन्त परिमेय संख्याएं होती हैं।

13. A sequence $\{x_n\}$ of positive terms is defined by

$$x_1 = K > 0, x_{n+1} = \frac{3+2x_n}{2+x_n}; \forall n \in N$$

Show that the sequence converges to a limit independent of k and find the limit.

धनात्मक पदों की एक अनुक्रम $\{x_n\}$ निम्न प्रकार से परिभाषित है

$$x_1 = K > 0, x_{n+1} = \frac{3+2x_n}{2+x_n}; \forall n \in N$$

प्रदर्शित कीजिए कि अनुक्रम, k से स्वतन्त्र एक सीमा को अभिसृत होती है एवं सीमा भी ज्ञात कीजिए।

14. Show that the integral $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ is convergent but it is not absolutely convergent. <https://www.msbuonline.com>

सिद्ध करो कि समाकल $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ अभिसारी है परन्तु निरपेक्ष अभिसारी नहीं है।

15. If a function is bounded and has only a finite number of points of discontinuity in $[a, b]$, then prove that f is Riemann integrable over $[a, b]$.
यदि एक फलन f अन्तराल $[a, b]$ में असतता के परिमित बिन्दु ही रखता हो तथा फलन f परिबद्ध हो तो सिद्ध कीजिए कि फलन f अन्तराल $[a, b]$ में रीमान समाकलनीय होगा।

16. The sum function of a uniformly convergent series $\sum f_n(x)$ of functions where each term is continuous in an interval $[a, b]$ is also continuous in the interval $[a, b]$.

एक समान अभिसारी श्रेणी $\sum f_n(x)$ जिसका प्रत्येक पद अन्तराल $[a, b]$ पर सतत् है तो सिद्ध करो कि श्रेणी का योग फलन भी अन्तराल $[a, b]$ में सतत् होगा।
