3024-I

B.A./B.Sc. (Part-II) Examination, 2024

(FACULTY OF SCIENCE)

[Also Common with Subsidiary Paper of B.A./B.Sc. (Hons.) Part II]

(Three-Year Scheme of 10+2+3 Pattern)

MATHEMATICS

First Paper

(Real Analysis)

Time Allowed : **Three** Hours

Maximum Marks : **40 for Science and 53 for Arts**

Note : 1. No supplementary answer-book will be given to any candidate. Hence the candidates should write the answer precisely in the main answer-book only.

किसी भी परीक्षार्थी को पूरक उत्तर-पुस्तिका नहीं दी जायेगी। अतः परीक्षार्थियों को चाहिये कि वे मुख्य उत्तर-पुस्तिका में ही समस्त प्रश्नों का उत्तर लिखें।

2. All the parts of one question should be answered at one place in the answer-book. One complete question should not be answered at different places in the answer-book.

किसी भी एक प्रश्न के अन्तर्गत पूछे गये विभिन्न प्रश्नों के उत्तर उत्तर-पुस्तिका में अलग-अलग स्थानों पर हल करने के बजाय एक ही स्थान पर हल करें।

3. This paper is divided into three sections A, B & C.

Section A consists of Ten short answer type questions. Each question is of 1 mark for Science and 1.5 marks for Arts. All questions are compulsory.

Section B consists of Ten questions taking two questions from each unit. Each question will carry 3 marks for science and 4 marks for Arts. Student has to attempt five questions, selecting one question from each unit.

Section C consists of five questions. Each question will carry 5 marks for Science and 6 marks for Arts. Student has to attempt any three questions.

यह प्रश्नपत्र तीन खण्डों अ, ब व स में विभाजित है।

खण्ड अ में दस लघूत्तरात्मक प्रश्न होंगे। प्रत्येक प्रश्न विज्ञान वर्ग के लिए 1 अंक तथा कला वर्ग के लिए 1.5 अंक का है। सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

खण्ड ब में कुल दस प्रश्न होंगे। प्रत्येक इकाई से दो प्रश्न होंगे। प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न हल करते हुए, कुल पाँच प्रश्न करने हैं। प्रत्येक प्रश्न विज्ञान वर्ग के लिए 3 अंक तथा कला वर्ग के लिए 4 अंक का है।

खण्ड स में कुल पाँच प्रश्न होंगे। प्रत्येक प्रश्न विज्ञान वर्ग के लिए 5 अंक तथा कला वर्ग के लिए 6 अंक का है। कोई तीन प्रश्न हल कीजिये।

Section-A /खण्ड-अ

1. Attempt all the following short answer type questions :

निम्नलिखित सभी लघुत्तरीय प्रश्नों को हल कीजिये :

(i) Write Trichotomy law of order axioms.

क्रम अभिगृहीतियों में त्रिविभागी नियम लिखिये।

(ii) Define limit point of a set.

समुच्चय के सीमा बिन्दु को परिभाषित कीजिये।

(iii) Define convergence of a sequence.

अनुक्रम के अभिसरण को परिभाषित कीजिये।

(iv) Write Cauchy's definition of continuity.

सांतत्य की कोशी की परिभाषा दीजिये।

(v) State the Darboux theorem for differentiability.

अवकलनीयता पर डार्बू प्रमेय का कथन दीजिये।

(vi) Define improper integral.

अनन्त समाकल को परिभाषित कीजिये।

(vii) Test the Riemann integrability of the following function :

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{if } x \text{ is rational}\\ 1, & \text{if } x \text{ is irrational}\end{cases}$$

निम्नलिखित फलन की रीमान समाकलनीयता का परीक्षण कीजिये :

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{यदि } x \text{ परिमेय है}\\ 1, & \text{यदि } x \text{ अपरिमेय है}\end{cases}$$

(viii) Define uniform convergence of series of functions.

फलनों की श्रेणी के अभिसरण को परिभाषित कीजिये।

(ix) Define integral function.

समाकल फलन को परिभाषित कीजिये।

(x) Define periodic function.

आवर्ती फलन को परिभाषित कीजिये।

Section-B /खण्ड-ब

Unit-I / इकाई-I

2. Show that $\sqrt{2}$ is not a rational number.

सिद्ध कीजिये कि $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या नहीं है।

OR/अथवा

3. Show that every open interval (a, b) is an open set.

सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक विवृत अन्तराल (a, b) एक विवृत समुच्चय होता है।

Unit-II / इकाई-II

4. Show that every bounded sequence has at least one limit point.

सिद्ध कीजिये प्रत्येक परिबद्ध अनुक्रम का कम से कम एक सीमा बिन्दु होता है।

OR/अथवा

5. If a function f is continuous on [a, b], then show that it attains its supremum and infimum at least once in [a,b].

यदि एक फलन f संवृत अन्तराल [a, b] में सतत् हो, तो सिद्ध कीजिये कि अन्तराल [a,b] में यह कम से कम एक बार अपने निम्नक व उच्चक को प्राप्त करता है।

Unit-III/इकाई-III

6. State and prove Rolle's theorem for differentiability.

अवकलनीयता पर रौल प्रमेय का कथन देकर उसे सिद्ध कीजिये।

OR/अथवा

7. Test the convergence of the integral $\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2} dx$

समाकल $\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2} dx$ के अभिसरण का परीक्षण कीजिये।

Unit-IV/इकाई-IV

8. If $f(x)=x, x\in[0,1]$, then show that f is R-integrable on [0, 1] and $\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$.

यदि $f(x)=x, x\in[0,1]$, तो सिद्ध कीजिये कि f अन्तराल [0, 1] पर R-समाकलनीय है तथा $\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$.

OR/अथवा

9. Prove that :

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Unit-V/खण्ड-V

10. Test the convergence of following series in closed interval [0, 1] :

$$\sum_{n=1}^{\infty} x\left[\frac{n}{1+n^2x^2}-\frac{(n+1)}{1+(n+1)^2x^2}\right].$$

निम्नलिखित श्रेणी की संवृत अन्तराल [0, 1] में एकसमान अभिसरण की जाँच कीजिये :

$$\sum_{n=1}^{\infty} x\left[\frac{n}{1+n^2x^2}-\frac{(n+1)}{1+(n+1)^2x^2}\right].$$

OR/अथवा

11. Find Fourier series of following function :

$$f(x)=x+x^2, -\pi\le x\le\pi$$

Contd.

निम्न फलन की फूरिये श्रेणी ज्ञात कीजिये :

$$f(x) = x + x^2, -\pi \le x \le \pi$$

Section-C / खण्ड-स

12. Show that every infinite bounded set has at least one limit point.

सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक असीमित परिबद्ध समुच्चय का कम से कम एक सीमा बिन्दु होता है।

13. Prove that the sequence $\{x_n\}$ is convergent and also find its limit, where :

$$x_1 = 1,\ x_{n+1} = \frac{4+3x_n}{3+2x_n}, \forall n \ge 1$$

सिद्ध कीजिये कि अनुक्रम $\{x_n\}$ अभिसारी है तथा इसकी सीमा भी ज्ञात कीजिये, जहाँ :

$$x_1 = 1,\ x_{n+1} = \frac{4+3x_n}{3+2x_n}, \forall n \ge 1$$

14. Test the convergence of Gamma function Γn :

$$\Gamma n = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$$

गामा फलन Γn के अभिसरण का परीक्षण कीजिये :

$$\Gamma n = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$$

15. Show that a function f is R-integrable over [a, b] if and only if given $\in > 0\ \exists$ a partition P of [a, b] such that :

$$0 \le U(f,P) - L(f,P) < \in$$

सिद्ध कीजिये कि फलन f अन्तराल [a, b] में R-समाकलनीय होता है यदि और केवल यदि प्रत्येक $\in > 0$ के लिए अन्तराल [a, b] का एक विभाजन P इस प्रकार विद्यमान है कि :

$$0 \le U(f,P) - L(f,P) < \in$$

16. Prove that the sequence $\{f_n\}$ of real valued functions defined on a domain D converges uniformly iff for every $\in > 0\ \exists$ a positive integer $n_0(\in) \in N$ such that :

$$m, n \ge n_0 \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \in, \forall x \in D.$$

सिद्ध कीजिये कि प्रांत D में परिभाषित वास्तविक मान फलनों का अनुक्रम $\{f_n\}$ एकसमान अभिसारी होता है यदि और केवल यदि प्रत्येक $\in > 0$ के लिए $\exists \; n_0(e) \in N$ ताकि :

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow \left| f_m(x) - f_n(x) \right| < \in, \; \forall \, x \in D.$$

--X--